

# Modulprüfung Mathematik 2

Vorname	Name	Matrikel-Nr.
Studiengang	Semesterzahl	

## Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 70 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind *erlaubt*: eigene Aufzeichnungen im Umfang von *vier* DIN A4-Blättern, *zweiseitig* beschrieben.
- Weitere Hilfsmittel sind *untersagt*; insbesondere ist die Verwendung von Taschenrechnern, Smartphones oder anderen elektronischen Geräte *untersagt*.
- Schreiben Sie *nicht* mit Rot und *nicht* mit Bleistift.
- Füllen Sie als Erstes den oberen Teil dieses Deckblatts aus. Sie erhalten anschließend 2 Aufgabenblätter. Die Zeit läuft erst, nachdem die Aufgabenblätter verteilt sind.
- Geben Sie die Lösungen zu Aufgabe 1 direkt auf dem ersten Aufgabenblatt an; entsprechende Nebenrechnungen können Sie auf mitgebrachten DIN A4-Blättern durchführen.
- Ansätze, Zeichnungen, Rechenwege und Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 schreiben Sie auf mitgebrachte DIN A4-Blätter. Lösungen ohne Rechenweg sind hier *nicht* ausreichend!
- Bitte notieren Sie oben auf jedem der Blätter Ihren Namen.
- Bitte notieren Sie die jeweiligen Nummern der Aufgaben zu den entsprechenden Lösungswegen.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

HA	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	Summe	Note

## Modulprüfung Mathematik 2

### Aufgabe 1

(a) Gegeben sind Funktionen  $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 z^2 \\ y^2 - z^2 x^2 \\ z^2 - x^2 y^2 \end{pmatrix};$

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y, z) = 2(x + y + z).$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐ Falls  $G$  in  $(x_0, y_0, z_0)$  ein lokales Extremum besitzt, folgt  $\text{grad } G = \vec{0}$  in  $(x_0, y_0, z_0)$ .
- ☐  $\text{rot } \vec{F}$  ist eine Funktion von  $\mathbb{R}^3$  nach  $\mathbb{R}$ .
- ☐ Es gilt  $\text{grad } \vec{F} = \text{rot } G$ .
- ☐ Es gilt  $\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2} = z^2 - y^2$ .
- ☐  $\text{div } G$  ist eine Funktion von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}^3$ .
- ☐ Es gilt  $\text{div } \vec{F} = G$ .

(b) Gegeben ist die Differentialgleichung  $y''(x) + y'(x) = 2e^x$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐ Die DGL ist linear.
- ☐ Die zugehörige charakteristische Gleichung hat keine reellen Nullstellen.
- ☐  $y(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x)$  ist die allgemeine Lösung der DGL.
- ☐ Die Diskriminante der zugehörigen charakteristischen Gleichung ist Null.
- ☐ Die DGL ist homogen.
- ☐  $y(x) = e^x - e^{-x}$  ist eine Lösung der DGL.

(c) Gegeben ist die Differentialgleichung  $\frac{y'(x)y(x)}{x} = 1$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐  $y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$  ist die allgemeine Lösung der DGL.
- ☐ Die DGL ist linear.
- ☐ Die zugehörige charakteristische Gleichung lautet:  $\lambda^2 + C = 0$ .
- ☐ Die DGL hat die Ordnung 3.
- ☐ Die Lösung der DGL erfolgt durch die Berechnung von Integralen.
- ☐  $y(x) = -x$  ist eine Lösung der DGL.

**Aufgabe 2** Gegeben ist eine beliebige komplexe Zahl auf dem Einheitskreis, mit  $z = e^{j\varphi}$ . Formulieren Sie die folgenden Terme in kartesischer Form und vereinfachen Sie soweit wie möglich:

(a)  $\frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$

(b)  $\frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$

**Aufgabe 3** Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der gegebenen Gleichung in kartesischer Form.

$$-\frac{z^2}{2}j = 1$$

*Hinweis:* Verwenden Sie zur Auflösung des entstehenden Wurzelausdrucks zunächst die Polarform.

**Aufgabe 4** Berechnen Sie die bestimmten Integrale:

(a)  $\int_1^e \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x}\right) dx$

(b)  $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

*Hinweis:* (a) ist elementar lösbar, bei (b) wird Substitution empfohlen.

**Aufgabe 5** Berechnen Sie die Lösung des lineares Gleichungssystems  $A\vec{x} = \vec{b}$  mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

und geben Sie diese in beschreibender Form  $\mathbb{L} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^4 \mid \dots\}$  an.

**Aufgabe 6** Gegeben ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie die Eigenwerte von  $A$  und geben Sie die entsprechenden Vielfachheiten an.
- (b) Zeigen Sie, dass  $A$  zu sich selbst invers ist.