

Modulprüfung Mathematik 2

Vorname	Name	Matrikel-Nr.

Studiengang	Semesterzahl

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 70 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind *erlaubt*: eigene Aufzeichnungen im Umfang von *vier* DIN A4-Blättern, *zweiseitig* beschrieben.
- Weitere Hilfsmittel sind *untersagt*; insbesondere ist die Verwendung von Taschenrechnern, Smartphones oder anderen elektronischen Geräte *untersagt*.
- Schreiben Sie *nicht* mit Rot und *nicht* mit Bleistift.
- Füllen Sie als Erstes den oberen Teil dieses Deckblatts aus. Sie erhalten anschließend 2 Aufgabenblätter. Die Zeit läuft erst, nachdem die Aufgabenblätter verteilt sind.
- Geben Sie die Lösungen zu Aufgabe 1 direkt auf dem ersten Aufgabenblatt an; entsprechende Nebenrechnungen können Sie auf mitgebrachten DIN A4-Blättern durchführen.
- Ansätze, Zeichnungen, Rechenwege und Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 schreiben Sie auf mitgebrachte DIN A4-Blätter. Lösungen ohne Rechenweg sind hier *nicht* ausreichend!
- Bitte notieren Sie oben auf jedem der Blätter Ihren Namen.
- Bitte notieren Sie die jeweiligen Nummern der Aufgaben zu den entsprechenden Lösungswegen.

Ich wünsche Ihnen viel Erfolg!

HA	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	Summe	Note

Modulprüfung Mathematik 2

Aufgabe 1

(a) Gegeben sind $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \sin(y) - y \cos(z) \\ y \sin(z) - z \cos(x) \\ z \sin(x) - x \cos(y) \end{pmatrix}$;
Funktionen

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y, z) = \sin(x) + \sin(y) + \sin(z).$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

☐ G besitzt in $(0, 0, 0)$ ein lokales Extremum.

☐ $\text{rot } \vec{F}$ ist eine Funktion von \mathbb{R}^3 nach \mathbb{R} .

☐ Es gilt $\text{grad } \vec{F} = \text{rot } G$.

☐ Es gilt $\text{div } \vec{F} = G$.

☐ Es gilt $\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial z} = \cos(x)$.

☐ $\text{div } G$ ist eine Funktion von \mathbb{R} nach \mathbb{R}^3 .

(b) Gegeben ist die Differentialgleichung $3y'(x) + \frac{y(x)}{4} = e^{\frac{x}{2}}$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

☐ Die Lösung der DGL erfolgt durch Trennung der Variablen.

☐ $y(x) = \frac{4}{7} e^{\frac{x}{2}}$ ist eine Lösung der DGL.

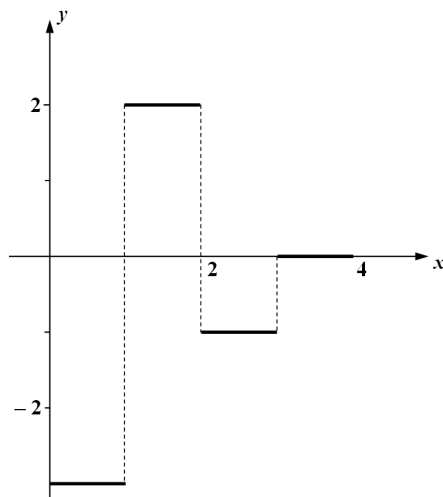
☐ Die zugehörige charakteristische Gleichung ist ein Polynom vom Grad 3.

☐ Die Ordnung der DGL ist 4.

☐ Die DGL ist inhomogen.

☐ Die Diskriminante der zugehörigen charakteristischen Gleichung ist Null.

(c) Gegeben ist der Graph einer Stufenfunktion f . Berechnen Sie die Integrale:



$$\int_1^2 f(x) dx =$$

$$\int_0^4 f(x) dx =$$

$$\int_0^4 f^2(x) dx =$$

Aufgabe 2 Gegeben sind eine Differentialgleichung und ein Anfangswertproblem

$$y''(x) + 16y(x) = 0 \quad (\text{DGL})$$

$$\left. \begin{array}{l} y(\frac{\pi}{4}) = -2 \\ y'(\frac{\pi}{4}) = 0 \end{array} \right\} \quad (\text{AWP})$$

- (a) Berechnen Sie die allgemeine reelle Lösung der DGL.
- (b) Bestimmen Sie die spezielle reelle Lösung der DGL zum AWP.

Aufgabe 3 Bestimmen Sie sämtliche komplexen Lösungen der gegebenen Gleichung in kartesischer Form.

$$z^2 = -8j$$

Hinweis: Verwenden Sie zur Auflösung des entstehenden Wurzelausdrucks zunächst die Polarform.

Aufgabe 4 Berechnen Sie das Grundintegral

$$\int \ln^2(x) dx$$

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration und benutzen Sie während der Berechnung das Grundintegral $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$.

Aufgabe 5 Gegeben ist die reelle Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechnen Sie den Rang von A .
- (b) A beschreibt eine lineare Abbildung zwischen zwei Vektorräumen $V = \mathbb{R}^? \xrightarrow{A} \mathbb{R}^? = W$. Geben Sie die Dimensionen von V und W an.
- (c) A ist nicht surjektiv. Begründen Sie, warum dies so ist.

Aufgabe 6 Gegeben sind eine reelle Matrix A und ihr charakteristisches Polynom $p(\lambda)$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p(\lambda) = (1 - \lambda)^3.$$

Berechnen Sie den Eigenraum V_1 und geben Sie diesen in beschreibender Form $V_1 = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^? | \dots\}$ an.