

Modulprüfung Mathematik 2

Vorname	Name	Matrikel-Nr.

Studiengang	Semesterzahl

Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 70 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind 4 Blätter mit eigenen Aufzeichnungen erlaubt. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig; insbesondere ist die Verwendung eines Taschenrechners, eines Smartphones oder anderer elektronischer Geräte nicht gestattet.
- Füllen Sie den oberen Teil dieses Deckblatts aus. Sie erhalten anschließend drei Aufgabenblätter. Geben Sie die Lösung zu Aufgabe 1 direkt auf den ersten beiden Aufgabenblättern an. Bei Aufgabe 1 werden ausschließlich die auf den Aufgabenblättern notierten Ergebnisse bewertet. Die Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 sind auf einseitig zu beschreibenden eigenen DIN A4-Blättern anzufertigen. Der vollständige Lösungsweg zu den Aufgaben 2 bis 6 einschließlich eventueller Nebenrechnungen ist schriftlich festzuhalten, die bloße Angabe des Ergebnisses zählt nicht als Lösung.
- Für jede der Aufgaben 2 bis 6 ist ein neues Blatt anzufangen. Kennzeichnen Sie alle Blätter einschließlich der Aufgabenblätter mit Ihrem Namen. Nummerieren Sie die Blätter fortlaufend durch. Schreiben Sie weder in Rot noch mit Bleistift.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!!

HA	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	Summe	Note

Modulprüfung Mathematik 2

Aufgabe 1

- (a) Geben Sie die folgenden komplexen Zahlen in Normalform $z = a + bj$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

$(1 + 2j)^{-1}$	
$e^{-j\pi/4}$	

- (b) v_1, v_2, v_3 seien die Spaltenvektoren einer regulären reellen 3×3 Matrix A . Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐ $\langle v_1, v_3 \rangle$ ist eine Ebene im \mathbb{R}^3 .
- ☐ Die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $A \cdot x = v_2$ ist eine Gerade im \mathbb{R}^3 .
- ☐ $\{v_1, v_2, v_3\}$ ist eine Basis des \mathbb{R}^3 .
- ☐ $\det(A) = 0$.
- ☐ 0 ist Eigenwert von A .
- ☐ A ist invertierbar.

- (c) Gegeben seien Funktionen

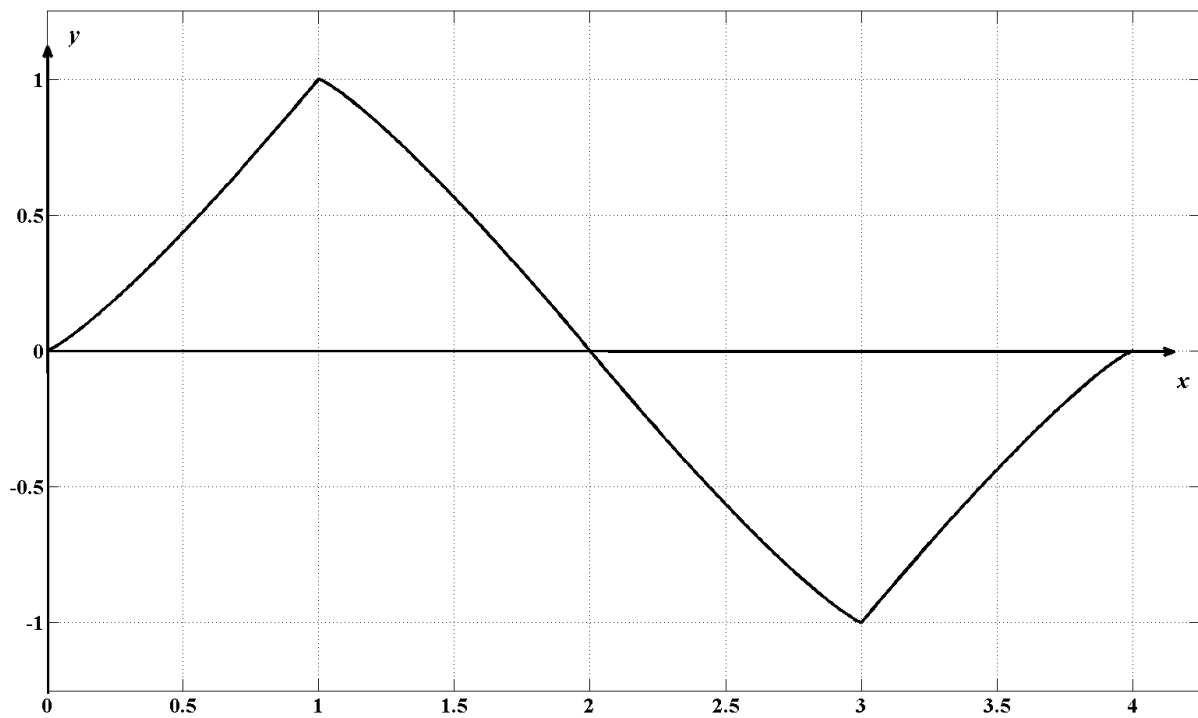
$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad \vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ yz \\ zx \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad G(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐ Es gilt $\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_3}{\partial z}$.
- ☐ $\text{grad } \vec{F}$ ist ein Skalarfeld und lässt sich direkt berechnen.
- ☐ $\text{grad } G$ ist ein Vektorfeld und lässt sich direkt berechnen.
- ☐ $\text{div } G$ ist ein Skalarfeld und lässt sich direkt berechnen.
- ☐ $\text{rot } G$ ist ein Vektorfeld und lässt sich direkt berechnen.

(d) Der Verlauf einer Funktion f im Intervall $[0; 4]$ ist durch den Graph von f bekannt:



Schätzen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe des Graphen von f grob ab:

$$\int_0^4 f(x) \, dx \approx \qquad \int_{1.5}^3 f(x) \, dx \approx$$

Aufgabe 2 Berechnen Sie das bestimmte Integral:

$$\int_1^4 \left(\cos\left(\frac{\pi}{2} x\right) + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{2}{3\pi} \right) dx$$

Aufgabe 3 Berechnen Sie das bestimmte Integral durch *partielle Integration*:

$$\int_0^1 x e^{-x} dx$$

Aufgabe 4 Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$y''(x) = -2(y'(x) + 2y(x))$$

- (a) Formen Sie die DGL in die Standard-Form um.
- (b) Ist die DGL homogen oder inhomogen? Begründen Sie Ihre Antwort.
- (c) Geben Sie die charakteristische Gleichung zur DGL an.
- (d) Berechnen Sie *alle* Nullstellen der charakteristischen Gleichung.
Hinweis: Wählen Sie die Grundmenge für die Nullstellenbestimmung möglichst groß.

Aufgabe 5 Geben Sie die Matrizen zu folgenden linearen Abbildungen $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an:

- (a) Spiegelung an der x -Achse.
- (b) Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{3}$.
- (c) Drehung um den Winkel $\frac{\pi}{3}$ und anschließende Spiegelung an der x -Achse.

Aufgabe 6 Die folgende reelle Matrix A sei gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von A .
Tipp: Nutzen Sie die Blockstruktur von A zur Vereinfachung Ihrer Berechnung.
- (b) Sie können nun voraussetzen, dass $\lambda = 0$ ein Eigenwert von A ist. Bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum und geben Sie seine Dimension an.
- (c) Gibt es eine Basis des \mathbb{R}^4 aus Eigenvektoren von A ? Begründen Sie Ihre Antwort.
Tipp: Verwenden Sie die Aufgabenteile (a) und (b).