

# Modulprüfung Mathematik 2

Vorname	Name	Matrikel-Nr.

Studiengang	Semesterzahl

## Allgemeine Hinweise:

- Die Bearbeitungszeit beträgt 70 Minuten.
- Als Hilfsmittel sind 4 Blätter mit eigenen Aufzeichnungen erlaubt. Weitere Hilfsmittel sind nicht zulässig; insbesondere ist die Verwendung eines Taschenrechners oder anderer elektronischer Geräte nicht gestattet.
- Füllen Sie den oberen Teil dieses Deckblatts aus. Sie erhalten anschließend drei Aufgabenblätter. Geben Sie die Lösung zu Aufgabe 1 direkt auf den ersten beiden Aufgabenblättern an. Die Lösungen zu den Aufgaben 2 bis 6 sind auf einseitig zu beschreibenden eigenen DIN A4-Blättern anzufertigen. Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt anzufangen. Kennzeichnen Sie alle Blätter einschließlich des ersten Aufgabenblatts mit Ihrem Namen. Nummerieren Sie die Blätter fortlaufend durch. Schreiben Sie weder in Rot noch mit Bleistift.
- Der vollständige Lösungsweg zu den Aufgaben 2 bis 6 einschließlich eventueller Nebenrechnungen ist schriftlich festzuhalten, die bloße Angabe des Ergebnisses zählt nicht als Lösung.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg!!

HA	Aufg. 1	Aufg. 2	Aufg. 3	Aufg. 4	Aufg. 5	Aufg. 6	Summe	Note

## Modulprüfung Mathematik 2

### Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie die fehlenden Einträge in der folgenden Tabelle. Geben Sie die komplexen Zahlen in Normalform an.

$z$	$\frac{1}{z}$	$r =  z $	$\varphi = \arg(z)$	$e^{j\varphi}$
$1 - j$				
		2		-1

- (b) Die folgenden Vektoren  $v_1, v_2, v_3, v_4$  im  $\mathbb{R}^3$  seien gegeben:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Welche der folgenden Mengen von Vektoren sind linear unabhängig? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐  $v_1, v_2$   
☐  $v_1, v_2, v_3$   
☐  $v_1, v_2, v_4$   
☐  $v_1, v_2, v_3, v_4$

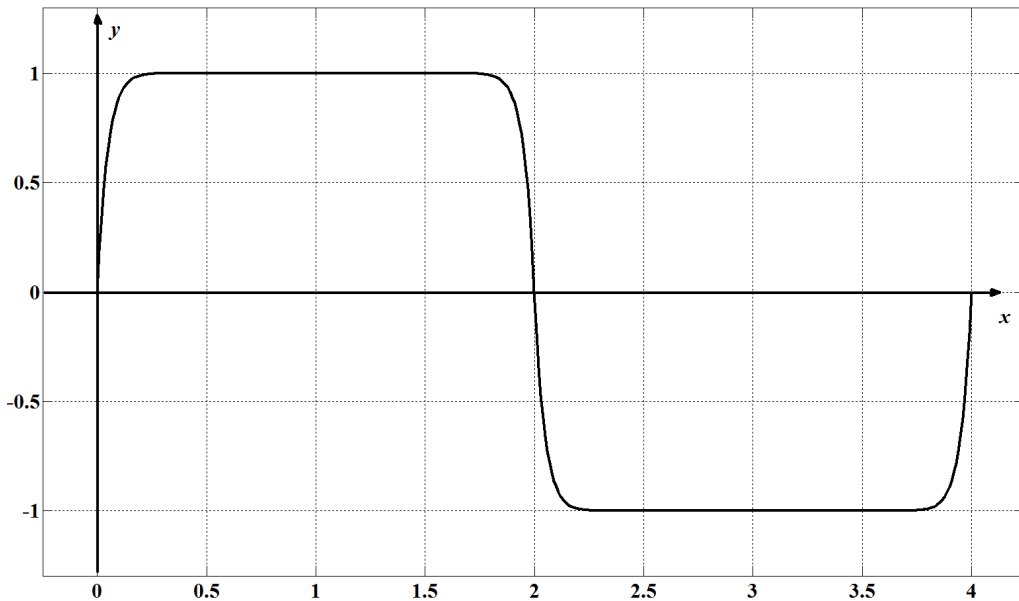
- (c) Sei  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  die lineare Abbildung, die Vektoren in der  $(x, y)$ -Ebene (d.h. um die  $z$ -Achse) um den Winkel  $\frac{3\pi}{4}$  gegen den Uhrzeigersinn dreht. Geben Sie zugehörige Abbildungsmatrix  $A$  an:

$$A =$$

(d) Sei  $\vec{K} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein Vektorfeld. Dann lässt sich die Divergenz  $\operatorname{div} \vec{K}$  berechnen. Welche Aussagen für  $\operatorname{div} \vec{K}$  sind richtig? (Eine oder mehrere Antworten ankreuzen)

- ☐  $\operatorname{div} \vec{K}$  lässt sich als *Wirbeldichte* von  $\vec{K}$  interpretieren.
- ☐  $\operatorname{div} \vec{K}$  lässt sich als *Quelldichte* von  $\vec{K}$  interpretieren.
- ☐  $\operatorname{div} \vec{K}$  ist ein *Vektorfeld*.
- ☐  $\operatorname{div} \vec{K}$  ist gleich  $|\operatorname{grad} \vec{K}|$ .
- ☐  $\operatorname{div} \vec{K}$  ist ein *Skalarfeld*.

(e) Der Verlauf einer Funktion  $f$  im Intervall  $[0; 4]$  ist durch den Graph von  $f$  bekannt:



Schätzen Sie die folgenden bestimmten Integrale mit Hilfe des Graphen von  $f$  auf *eine* Nachkommastelle genau:

$$\int_0^4 f(x) \, dx \approx$$

$$\int_0^4 |f(x)| \, dx \approx$$

$$\int_{1.5}^3 f(x) \, dx \approx$$

$$\int_3^4 f(x) \, dx \approx$$

**Aufgabe 2** Berechnen Sie das bestimmte Integral:

$$\int_1^0 (-1) \sqrt[4]{x} \, dx$$

**Aufgabe 3** Berechnen Sie das bestimmte Integral durch die *Substitution*  $z(x) = \text{„Winkelfunktion}(x)\text{“}$ :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin(x)} \cos(x) \, dx$$

**Aufgabe 4** Gegeben sei die inhomogene Differentialgleichung:

$$\frac{1}{2}x^2 + 2y''(x) = 4 - 8y(x)$$

- (a) Welche Ordnung besitzt die DGL?
- (b) Mit welchem Buchstaben ist die gesuchte Funktion bezeichnet?
- (c) Mit welchem Buchstaben ist die Variable der gesuchten Funktion bezeichnet?
- (d) Formen Sie die DGL in die Standard-Form um.
- (e) Geben Sie die Störfunktion  $s(x)$  an.
- (f) Berechnen Sie eine spezielle Lösung der inhomogenen DGL. *Hinweis:* Verallgemeinern Sie die Störfunktion  $s(x)$  zunächst zu einem Ansatz  $\sigma(x)$  mit freien Koeffizienten. Gehen Sie dann mit  $\sigma(x)$  (und entsprechenden Ableitungen von  $\sigma(x)$ ) in die DGL, um mittels Koeffizientenvergleich  $\sigma(x)$  genau zu bestimmen.

**Aufgabe 5** Gegeben sei die Differentialgleichung:

$$y^2 y' - 3x^2 = 0$$

- (a) Berechnen Sie die allgemeine Lösung der DGL durch *Trennung der Variablen*.
- (b) Berechnen Sie die spezielle Lösung der DGL zum AWP  $y(0) = 1$

**Aufgabe 6** Die folgende reelle Matrix  $A$  sei gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von  $A$ .
- (b) Überprüfen Sie, dass  $\lambda = -1$  ein Eigenwert ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenraum.
- (c) Zeigen Sie, dass  $A$  eine reguläre Matrix ist.